Total number of printed pages–16

**3 (Sem–5/CBCS) MAT RE 1/RE 2**

**2021**

**(Held in 2022)**

# MATHEMATICS

( Regular Elective )

**OPTION–A**

Paper : MAT–RE–5016

***( Number Theory )***

*Full Marks : 80*

Time : Three hours

***The figures in the margin indicate full marks for the questions.***

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

## PART–A

1. Choose the correct option from the following : $1\times10=10$

তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ শুদ্ধ উত্তৰ বাছি উলিওৱা ঃ

*(i)* If $a$ and $b$ are any two integers, then there exists $x$ and $y$ such that,

যদি $a$ আৰু $b$ দুটা যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা হয়, তেতিয়াহলে তাত $x$ আৰু $y$ দুটা সংখ্যা থাকিব, যাতে

*(a)* $gcd(a, b) = ax + by$

(b) $gcd(a, b) = ax - by$

(c) $gcd(a, b) = ax^n + by^n$

(d) $gcd(a, b) = (ax + by)^n$

(ii) Let $m$ be a positive integer. Two integers $a$ and $b$ are congruent modulo $m$ iff
ধৰা হ'ল $m$ এটা ধনাত্মক সংখ্যা। $a$ আৰু $b$ অখণ্ড সংখ্যা দুটা congruent modulo $m$ হ'ব যদি আৰু একমাত্ৰ যদিহে

(a) $m \mid (a - b)$

(b) $m \mid (a + b)$

(c) $m \mid (a \times b)$

(d) Both (b) and (c)
[ (b) আৰু (c) উভয়ে ]

(iii) If (যদি) $a \equiv b \pmod m$ and (আৰু) $c \equiv d \pmod m$, then (তেতিয়াহলে)

(a) $a + c \equiv b + d \pmod m$

(b) $a - c \equiv b - d \pmod m$

(c) $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$

(d) All of the above
(ওপৰৰ আটাইবোৰ)

(iv) The RRS modulo 6 contains the set of integers

RRS modulo 6 ত তলৰ অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটো হ'ব

(a) $\{0, 5\}$

(b) $\{1, 5\}$

(c) $\{1, 2, 3\}$

(d) $\{1, 3, 6\}$

(v) The solution of the linear congruence $2x \equiv 1 \pmod 3$ is

$2x \equiv 1 \pmod 3$ ৰৈখিক congruence টোৰ সমাধান হ'ব

(a) $x \equiv 2 \pmod 3$

(b) $x \equiv 1 \pmod 3$

(c) $x \equiv 0 \pmod 3$

(d) None of the above

(ওপৰৰ এটাও নহয়)

(vi) Euler $\phi$ function of a prime number $p$, i.e., $\phi(p) = ?$

এটা মৌলিক সংখ্যা $p$ ৰ আইলাৰ $\phi$ ফলন অৰ্থাৎ $\phi(p) = ?$

(a) $p$

(b) $p-1$

(c) $\frac{p}{2}-1$

(d) None of the above
(ওপৰৰ এটাও নহয়)

(vii) Which theorem states that 'If $p$ is a prime, then $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$' ?

(a) Dirichlet's theorem
(b) Wilson's theorem
(c) Euler's theorem
(d) Fermat's Little theorem

যদি $p$ এটা মৌলিক সংখ্যা হয়, তেতিয়া $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ — এইটো তলৰ কোনটো উপপাদ্য হ'ব?

(a) Dirichlet ৰ উপপাদ্য
(b) Wilson ৰ উপপাদ্য
(c) Euler ৰ উপপাদ্য
(d) Fermat ৰ Little উপপাদ্য

(viii) "Let $p$ be a prime and $p$ does not divide $a$, then $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$" is a statement of

(a) Dirichlet's theorem
(b) Euclid's theorem
(c) Fermat's Little theorem
(d) Wilson's theorem

"ধৰা হ'ল $p$ এটা মৌলিক সংখ্যা আৰু $p$, $a$ ৰ বিভাজ্য নহয়, তেতিয়াহলে $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$" এইটো তলৰ কোনটো উপপাদ্যৰ?

(a) Dirichlet ৰ উপপাদ্য

(b) Euclid ৰ উপপাদ্য

(c) Fermat ৰ Little উপপাদ্য

(d) Wilson ৰ উপপাদ্য

(ix) The unit place digit of $3^{46}$ is

$3^{46}$ ৰ একক স্থানৰ অংকটো হ'ব

(a) 3

(b) 7

(c) 1

(d) 9

(x) The highest power of 7 that divides 50 ! is

50 ! ৰে বিভাজ্য 7 ৰ সৰ্বোচ্চ ঘাতটো হ'ব

(a) 7

(b) 8

(c) 10

(d) 5

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Apply Chinese remainder theorem to solve

চাইনীজ ভাগশেষ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি সমাধান কৰা

$$x \equiv 3 \pmod 5$$
$$x \equiv 5 \pmod 7$$

(b) Find $\phi(100)$.

$\phi(100)$ ৰ মান উলিওৱা।

(c) Prove that $\tau(m)$ is multiplicative, i.e., $\tau(m \cdot n) = \tau(m)\tau(n)$.

প্ৰমাণ কৰা যে, $\tau(m)$ পূৰণৰ যোগ্য অৰ্থাৎ $\tau(m \cdot n) = \tau(m)\tau(n)$।

(d) Find $\sigma(12)$.

$\sigma(12)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Let $x$ and $y$ be any real numbers, prove that $[x]+[y] \leq [x+y]$ (where $[x]$ denotes greatest integer $\leq x$)

ধৰা হ'ল $x$ আৰু $y$ দুটা যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা। প্ৰমাণ কৰা যে, $[x]+[y] \leq [x+y]$

(য'ত $[x]$ এটা সৰ্বোচ্চ অখণ্ড সংখ্যা $\leq x$)

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

তলৰ *যিকোনো চাৰিটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Find the remainder when $30^{40}$ is divided by 17.

$30^{40}$ ক 17 ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) If $d = gcd(a, n)$ prove that the linear congruence $ax \equiv b \pmod{n}$ has a solution if and only if $d \mid b$.

যদি $d = gcd(a, n)$, প্ৰমাণ কৰা যে $ax \equiv b \pmod{n}$ ৰৈখিক congruence ৰ এটা সমাধান থাকিব যদি আৰু একমাত্ৰ যদিহে $d \mid b$।

(c) If $p$ is prime and $k > 0$, then prove that

যদি $p$ এটা মৌলিক সংখ্যা হয় আৰু $k > 0$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\phi\left(p^k\right) = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Verify this result for $\phi(16)$.

$\phi(16)$ ৰ বাবে ফলটোৰ সত্যাপন কৰা।

(d) For $n = p^k$, $p$ is a prime, prove that $n = \sum_{d|n} \phi(n)$, where $\sum_{d|n}$ denotes the sum over all positive divisors of $n$.

$n = p^k$, য'ত $p$ এটা মৌলিক সংখ্যা, ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে, $n = \sum_{d|n} \phi(n)$ য'ত $\sum_{d|n}$ য়ে $n$ ৰ ধনাত্মক বিভাজ্যসমূহৰ যোগফল নিৰ্দেশ কৰে।

(e) Prove that no integer of the form $4n+3$ is the sum of two squares.

প্ৰমাণ কৰা যে, $4n+3$ আকাৰৰ দুটা বৰ্গৰ যোগফলৰ কোনো অখণ্ড সংখ্যা পাব নোৱাৰি।

(f) Show that an integer $p>1$ is a prime if $p$ divides $a.b$ implies either $p$ divides $a$ or $p$ divides $b$.

দেখুওৱা যে, এটা অখণ্ড সংখ্যা $p>1$ এটা মৌলিক হ'ব যদিহে $a.b$, $p$ ৰে বিভাজ্যই বুজায় — হয় $a$, $p$ ৰে বিভাজ্য অথবা $b$, $p$ ৰে বিভাজ্য।

## PART–B

*Answer **any four** from the following questions:* $10\times4=40$

*তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ*

4. (a) Show that, the set of integers $\{1, 5, 7, 11\}$ is a RRS (reduced residue system) modulo 12. 5

দেখুওৱা যে, $\{1, 5, 7, 11\}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটো এটা modulo 12 ৰ RRS।

(b) If $a, b, c$ be integers such that $ac \equiv bc\,(mod\, m)$ and $d \equiv gcd\,(c, m)$, then prove that $a \equiv b\left(mod\,\frac{m}{d}\right)$. 5

যদি $a, b, c$ অখণ্ড সংখ্যা হয়, যাতে $ac \equiv bc \pmod{m}$ আৰু $d \equiv \gcd(c, m)$

তেতিয়াহলে, প্ৰমাণ কৰা যে $a \equiv b \left( mod\ \frac{m}{d} \right)$.

5. (a) If $p$ is a prime, then prove that
যদি $p$ এটা মৌলিক, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\phi(p!) = (p-1)\,\phi((p-1)!)$$ 5

(b) Prove that $5n+3$ and $7n+4$ are co-prime to each other for any natural number $n$. 5
প্ৰমাণ কৰা যে যিকোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা $n$ ৰ বাবে $5n+3$ আৰু $7n+4$ সংখ্যা দুটা এটা আনটোৰ সহ-মৌলিক হব।

6. (a) If $p$ is a prime, then prove that $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. 5
যদি $p$ এটা মৌলিক হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

(b) Solve the following simultaneous congruence : 5

$$x \equiv 3 \pmod{11}$$
$$x \equiv 5 \pmod{19}$$
$$x \equiv 10 \pmod{29}$$

তলৰ সহ congruence কেইটা সমাধান কৰা ঃ

$$x \equiv 3 \pmod{11}$$
$$x \equiv 5 \pmod{19}$$
$$x \equiv 10 \pmod{29}$$

7. (a) Using property of congruence, show that, 41 divides $2^{20}-1$. 5

Congruence ৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে $2^{20}-1$, 41 ৰে বিভাজ্য।

(b) Prove that any positive integer $n\,(n>1)$ can be expressed uniquely as a product of primes. 5

প্ৰমাণ কৰা যে যিকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $n\,(n>1)$ ক মৌলিক সংখ্যাৰ পূৰণফল হিচাপে একক ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

8. (a) If $n$ is any integer can be expressed as $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}\ldots\ldots p_k^{\alpha_k}$, then prove that

$$\phi(n) = n\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)$$ 5

যদি যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা $n$ ক,

$n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}\ldots\ldots p_k^{\alpha_k}$ ৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি,

তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, $\phi(n) = n\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)$

(b) If $m$ and $n$ are any two integers such that $(m, n)=1$, prove that

$$\phi(m, n) = \phi(m).\phi(n)$$ 5

যদি $m$ আৰু $n$ দুটা অখণ্ড সংখ্যা হয় যাতে $(m, n)=1$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\phi(m, n) = \phi(m).\phi(n)$$

9. (a) If $n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}.....p_r^{k_r}$ is the prime factorization of $n>1$, then prove that

যদি $n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}.....p_r^{k_r}$ এটা $n>1$ ৰ মৌলিক উৎপাদক হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\tau(n) = (k_1+1)(k_2+1)\,.....\,(k_r+1)$$

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1} \times \frac{p_2^{k_2+1}-1}{p_2-1} \times ..... \times \frac{p_r^{k_r+1}-1}{p_r-1}$$

5

(b) Find the number of zeroes in the end of the product of first 100 natural numbers. 5

প্ৰথম 100 টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পূৰণফলৰ শেহত থকা শূন্যৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

10. *(a)* Define Mobiu's function. Also prove that

$$\mu(m \cdot n) = \mu(m) \cdot \mu(n)$$

Hence find $\mu(6)$. 5

মবিয়াৰ ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে,

$\mu(m \cdot n) = \mu(m) \cdot \mu(n)$

ইয়াৰ পৰা $\mu(6)$ ৰ মান উলিওৱা।

*(b)* For each positive integer $n \geq 1$, show that

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad n = 1 \\ 0, & \text{if} \quad n > 1 \end{cases}$$ 5

প্ৰতিটো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $n \geq 1$ ৰ বাবে দেখুওৱা

যে $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{যদি} \quad n = 1 \\ 0, & \text{যদি} \quad n > 1 \end{cases}$

11. *(a)* Let $a, m > 0$ be integers such that $(a, m) = 1$, then prove that

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \,(mod\, m)$$ 5

যদিহে $a, m > 0$ অখণ্ড সংখ্যা হয় য'ত $(a, m) = 1$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \,(mod\, m)$$

*(b)* Solve (সমাধান কৰা) : 5

$$f(x) = x^2 + x + 7 \equiv 0 \,(mod\, 3)$$

## OPTION-B

Paper : MAT-RE-5026

***(Discrete Mathematics)***

*Full Marks : 80*

Time : Three hours

***The figures in the margin indicate full marks for the questions.***

1. Give very short answers : 1×10=10

   *(a)* Define upper and lower bound of a poset.

   *(b)* What is a chain ?

   *(c)* Write the commutative law of a lattice.

   *(d)* Define a sublattice.

   *(e)* Every singleton set of a lattice is a sublattice. State true ***or*** false.

   *(f)* State De Morgan's law.

   *(g)* Write the identity law of a Boolean algebra.

   *(h)* Define a Boolean variable.

   *(i)* Define a complemented lattice.

   *(j)* Write the basic operations of a Boolean algebra.

2. Give short answers : 2×5=10

(a) Let $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$ be ordered set with the relation '$x$ divides $y$'. Draw its Hasse diagram.

(b) Write the properties of a distributive lattice.

(c) Give an example of a modular lattice.

(d) Prove that in a Boolean algebra $B$, $(a')' = a,\ \forall a \in B$.

(e) If $L$ be a lattice, then for every $a, b \in L$, prove that $a \vee b = b$ iff $a \leq b$.

3. Answer the following : ***(any four)*** 5×4=20

(a) Show that $(Z^+, /)$ is a lattice.

(b) Express the Boolean function $f(x, y, z) = x + y'z$ in a sum of minterms.

(c) In a distributive lattice $(L, <)$ prove that $a \wedge b = a \wedge c$ and $a \vee b = a \vee c \Rightarrow b = c$.

(d) Give an example to show that the union of two sublattices may not be a sublattice.

(e) Express the Boolean function $f(x, y, z) = xy + x'y$ as product of maxterms.

(f) Prove that the elements 0 and 1 of Boolean algebra are unique.

4. Answer the following : *(any four)* 10×4=40

(a) Prove that a non-empty finite poset has

(i) at most one greatest element;

(ii) at most one least element.

(b) Show that in a complemented distributive lattice the following are equivalent :

(i) $a \leq b$

(ii) $a \wedge b' = 0$

(iii) $a' \vee b = 1$

(iv) $b' \leq a'$

(c) Consider the subsets $\{2, 3\}$, $\{4, 6\}$, $\{3, 6\}$ of the poset $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, /\}$. Find for each subset (if exist)

(i) upper bound and lower bound;

(ii) greatest lower bound and least upper bound.

(d) Write a short note on Karnaugh map method in Boolean algebra. Find the Karnaugh maps and simplify the following expressions :

(i) $AB' + A'B'$

Contd.

(ii) $AB' + A'B$

(iii) $AB' + A'B + A'B'$

(e) Simplify the following Boolean expressions :

(i) $x(y+z)(x+y+z)$

(ii) $xy + x'z + yz$

(iii) $x + y(x+y) + x(x'+y)$

(f) Determine all the sublattices of $D_{30}$ containing four elements.

$D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

Also draw the Hasse diagram.

(g) In a Boolean algebra $B$, prove the following :

(i) $(a+b)' = a'.b', \ \forall a, b \in B$

(ii) $(a.b) + (a'+b') = 1, \ \forall a, b \in B$

(iii) $(a+b)(a'+c) = ac + aB, \ \forall a, b, c \in B$

(h) Express the following in disjunctive normal form : *(any two)*

(i) $f(x, y, z) = (yz + xz')(xy' + z)'$

(ii) $f(x, y, z) = (x + x'y + x'yz')\left(xy + (xz)'\right)(y + xyz')$

(iii) $f(x, y, z) = (x'y)' . (x+y)$